1998年　東大数学　文系 第1問 ①

解法1　なるべく愚直に。

$f(x)=3x^3-3\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-4x+4\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$f'(x)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$　となる。

$f'(x)=0$ の解が α, β なので、因数分解したい。
(が、思い付かない。(思い付いたら skip!!))

因数分解のための補助計算

$9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4=0$ を解くと、

$$x=\frac{3\left(a-\frac{1}{a}\right)\pm\sqrt{3\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+36}}{9}=\frac{3\left(a-\frac{1}{a}\right)\pm\sqrt{3\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}}{9}$$

$$=\frac{3\left(a-\frac{1}{a}\right)\pm 3\left|a+\frac{1}{a}\right|}{9}$$

$a+\frac{1}{a}>0$ のとき、$x=\frac{3\left(a-\frac{1}{a}\right)\pm3\left(a+\frac{1}{a}\right)}{9}=\frac{2}{3}a,\ -\frac{2}{3a}$

$a+\frac{1}{a}<0$ のとき　$x=\frac{3\left(a-\frac{1}{a}\right)\pm3\left(-a-\frac{1}{a}\right)}{9}=\frac{2}{3}a,\ -\frac{2}{3a}$

よって、いずれにしろ、
$x=\frac{2}{3}a,\ -\frac{2}{3a}$　である。

$f'(x)=(3x-2a)\left(3x-\frac{2}{a}\right)$　と因数分解できる。

$\alpha=\frac{2}{3}a,\quad \beta=-\frac{2}{3a}$　とおく。

(i) $\alpha>\beta$ つまり、$\frac{2}{3}a>-\frac{2}{3a}$　$\frac{a^2+1}{a}>0$　$a>0$ のとき。

x	$\cdots$	β	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\beta)$ 極大	$\searrow$	$f(\alpha)$ 極小	$\nearrow$

(ii) $\alpha<\beta$ つまり　$\frac{2}{3}a<-\frac{2}{3a}$　$\frac{a^2+1}{a}<0$　$a<0$ のとき。

x		α		β	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$ 極大	$\searrow$	$f(\beta)$ 極小	$\nearrow$

極大値、極小値を求めるプロセス

よって、極大値と極小値の差は

$$\begin{cases} a>0 \text{ のとき} & f(\beta)-f(\alpha) \\ a<0 \text{ のとき} & f(\alpha)-f(\beta) \end{cases}$$ である。

$f(\alpha)$ や $f(\beta)$ を計算するのが面倒と判断すると、整式の割り算で進める方針もある。

$f(x)\div f'(x)$ を実行すると、

$$\begin{array}{r|llll}
 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9}\left(a-\frac{1}{a}\right) & & \\ \hline
9\quad -6\left(a-\frac{1}{a}\right)\quad -4 & 3 & -3\left(a-\frac{1}{a}\right) & -4 & 4\left(a-\frac{1}{a}\right) \\
 & 3 & -2\left(a-\frac{1}{a}\right) & -\frac{4}{3} & \\ \hline
 & & -\left(a-\frac{1}{a}\right) & -\frac{8}{3} & 4\left(a-\frac{1}{a}\right) \\
 & & -\left(a-\frac{1}{a}\right) & \frac{2}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 & \frac{4}{9}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ \hline
 & & & -\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 & \frac{5}{9}\left(a-\frac{1}{a}\right)
\end{array}$$

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

よって、$f(x)=f'(x)\times\left\{\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}-\left\{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right\}x+\frac{5}{9}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

これを利用すると

$f(\alpha)-f(\beta)=-\left\{\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\right\}(\alpha-\beta)$

$=\cdots$

$=-\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$

このプロセスは、$f(\alpha)-f(\beta)$ を計算するもの。
解法3で代用しても OK

よって、極大値と極小値の差は、

$$\begin{cases} a>0 \text{ のとき} & \frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 \\ a<0 \text{ のとき} & -\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 \end{cases}$$

(1) $a>0$ のとき、
相加平均 相乗平均の関係より
$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=2$
等号成立条件は、$a=\frac{1}{a}$　$\therefore a=\pm1$　よって
(極大値)－(極小値) を最小にする a は $a=\pm1$

1998年　東大数学　文系第1問②

(ii) $a<0$ のとき

$(極大値)-(極小値)=\frac{4}{9}\left(-a+\frac{1}{-a}\right)^3$

よって $-a+\frac{1}{-a}$ が最小のとき (極大値)−(極小値)が最小。

相加平均、相乗平均の関係より

$-a+\frac{1}{-a}\geqq 2\sqrt{(-a)\cdot\frac{1}{(-a)}}=2$

等号成立条件は

$-a=\frac{1}{-a}$　$a=\pm 1$

よって 求める a は $a=\pm 1$

以上より、極大値と極小値の差は $a=\pm 1$ のときである。

解法2　絶対値の利用

$a\neq 0$ のとき、$\alpha\neq\beta$ であるから、
極大値、極小値は $f(\alpha)$、$f(\beta)$ のいずれかである。
よって

$(極大値)-(極小値)=|f(\alpha)-f(\beta)|$ とおける。

$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|-\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\right|$

$=\frac{4}{9}\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)^3$ なので、

$|a|+\frac{1}{|a|}$ に対し、相加相乗を利用してもOK.

解法3　$f(\alpha)-f(\beta)$ に対し、積分の利用

$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx$ なので、

$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\right|$

$=\left|9\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|$

$=\left|9\times -\frac{1}{6}(\alpha-\beta)^3\right|$

$=\frac{3}{2}|\alpha-\beta|^3=\frac{3}{2}\left|\frac{2}{3}a+\frac{2}{3a}\right|^3=\frac{4}{9}\left|a+\frac{1}{a}\right|^3$